解题赛拟模 2202 选省合联 FCC

2022 年 2 月 7 日

简 (simple)

考虑到后两题过于毒瘤，因此放了一道签到题。实际通过人数符合预期。

赛时有一车人过了这个题，所以只给满分做法的题解。

因为集合内部元素的顺序是无关紧要的，而且我们只关心每个集合的极差。因此我们不妨将所有元素从小到大排好序。

此时我们从小到大，一个元素一个元素加入。(类似于斯特林数那个式子的推导?)

我们加入一个元素有四种选择:

* 这个元素单独在一个集合 * 新开一个集合，这个元素作为最小值 * 放入一个已有的集合，这个元素作为最大值。* 放入一个已有的集合。

但是 $\sum a$ 比较大我们不能直接放在状态里面，由于我们只要极差之和小于给定的限制。因此我们可以考虑做差分。每次加入一个元素，记它和上一个元素的差为 d，还没有确定的集合数量为 x，那么极差之和会增大 kx。

那么设个 $f[i][j][s]$，剩下的就非常显然了。复杂度 $O(n^2k)$。

单 (s2mple)

~~本题是本场比赛的签到题，因此数据比较水，可能随便怎么搞搞就过了。~~

【Subtask 1/2】

直接搜就好了。

【Subtask 3】

不知道有没有什么高妙算法。

【Subtask 4】

考虑如下问题:

给定一个无向图，将边定向，使得入度不为 0 的点尽量多。

容易构造证明，这个问题的答案就是无向图点数 - 无向图中树的个数:

分类讨论每个联通块的情况，如果是树即 $m = n - 1$，那么可以将其定向成外向树使得除了根以外所有点合法。否则取出一棵基环生成树，将其定向成外向基环树，可以让所有点合法。结合二者可知结论正确。

我们现在要求树的个数的最小值，即求给边定向后入度不为 0 点数的最大值。

而在集合中选两个点连一条边，再给它定向，等价于在集合里选一个点，并将其度数 +1。

那么把集合当作二分图左边的点，原问题的点当成二分图右边的点，集合向集合内的点连边。那答案就是 n 减去二分图的最大匹配。

最大匹配可以用 $dinic$ 求，复杂度 $O(n\sqrt{m})$。

题（s3mple）

【Subtask 2/3】

经典题，见 CTSC 祭祀。

【Subtask 1/4】

留给乱搞。

【Subtask 4】

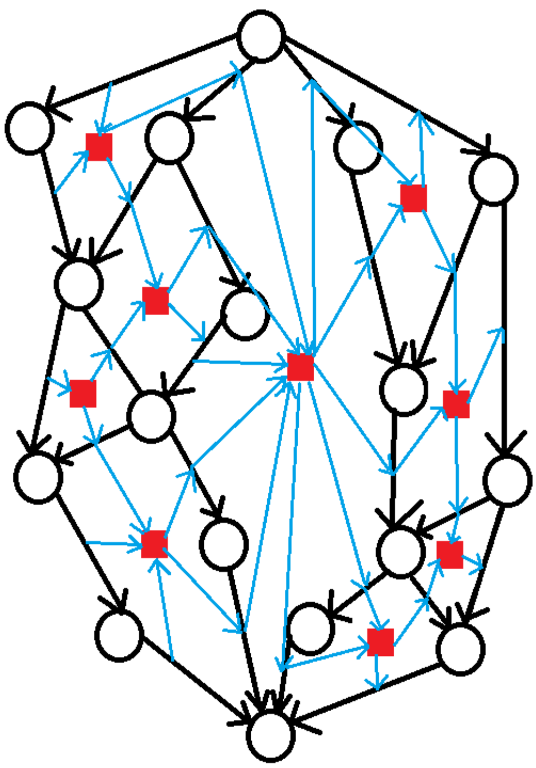
看到最小链覆盖，容易想到用 Dilworth 定理将其转为最长反链长度。

现在要求的最长反链，即一组没有偏序关系的边的集合的大小最大值。

现在考虑把这个图转成对偶图：

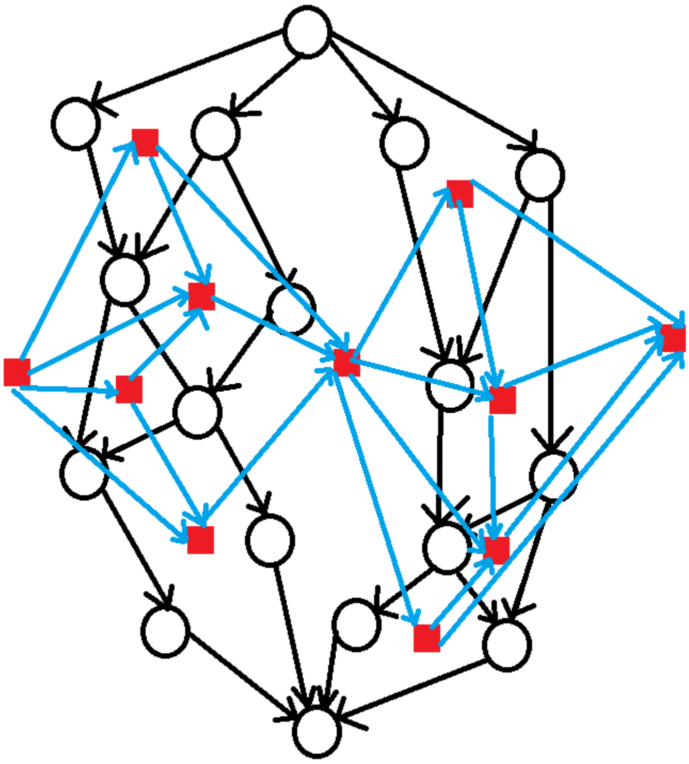
把边看成点，共面的两边如果不在面的一侧就有连边，方向为从西向东。（这个东西不太好描述，看下面的图）

直接连的话边数会是 $O(n^2)$ 的，可以对于每个面，西侧的向向它连边，它向东侧的连边，复杂度就对了。



现在是把面看成虚点，其实把面看成点，每条边连个边就很好写了。

更简洁的对偶方式：最小链（点）覆盖数，最长反链（边）长度（点变成了面）。
所以把所有面标号，每条边东西两边连边，跑最长链。
找面：每个点的两个相邻边对应了一个面，剩下的边一直向最东最西即可。



另外，因为是平面图，所以 $m \le 3n-6$ ，面数也是不到 $2n$ 的。
时间复杂度 $O(n)$ 。